Probni prijemni ispit iz matematike
April 2019.

1. Uprostiti izraz

$$\left[\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2+3}\right] : \left[\frac{1-a^2}{a^3+8} + \frac{1+a}{a^2-4}\right].$$

Odrediti vrednost izraza za $a = -1,25$.

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}.$$

3. Dokazati tačnost jednakosti

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2 \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 8\right) = -\frac{1}{2}.$$

4. Izračunati

$$\sin \frac{\pi}{12}.$$

5. Ako je

$$f(x) = \frac{2014x+1}{2014x-1},$$

izračunati $f(f(x))$.

Probni prijemni ispit 2019. april
Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\left(7+\frac{1}{3}\right):\frac{11}{6}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\left(\left(14+\frac{2}{3}\right):\frac{11}{3}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=1.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2x+14}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}.$$

3. Izračunati

$$\log_2(5\log_3 9-\log_5 25).$$

1. Transformacije datog izraza I daju

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{a-2}-\frac{a}{a^2-2a+4}\right]:\left[\frac{(1-a)(1+a)}{(a+2)(a^2-2a+4)}+\frac{1+a}{(a-2)(a+2)}\right]\\
&= \frac{a^2-2a+4-a^2+2a}{(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{a+2}{a+1}:\left[\frac{1-a}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a-2}\right]\\
&= \frac{4}{(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{a+2}{a+1}:\frac{a-2-a^2+2a+a^2-2a+4}{(a-2)(a^2-2a+4)}\\
&= \frac{4(a+2)}{(a+1)(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{(a+2)(a-2a+4)}{a+2}\\
&= \frac{4}{a+1}.
\end{aligned}$$

Za $a=-5/4$ dobija se $I(-5/4)=-16$.

2. U domenu realnih brojeva jednačina ima smisla ako su izpunjena tri uslova $x\geq 3/2$, $x\geq 2$, i $x\geq 3$ čiji je presek $x\geq 3$. Kvadriranje leve i desne strane jednačine daje

$$(\sqrt{2x-3})^2=(\sqrt{x-2})^2+2\sqrt{(x-2)(x-3)}+(\sqrt{x-3})^2,$$

$$|2x-3|=|x-2|+\sqrt{x^2-5x+6}+|x-3|,$$

$$2x-3=x-2+2\sqrt{x^2-5x+6}+x-3, \qquad 1=\sqrt{x^2-5x+6},$$

$$1=x^2-5x+6 \quad x^2-5x+5=0, \qquad x_{1,2}=(5\pm\sqrt{15})/2.$$

Rešenje je $x=(5+\sqrt{15})/2$.

3. Dati izraz je

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2 2^{-1}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)=\log_{\frac{1}{9}}((-1)\cdot(-3))=\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2}=-\frac{1}{2}.$$

4.

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/6)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2)}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

5.

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= \frac{2014\frac{2014x+1}{2014x-1}+1}{2014\frac{2014x+1}{2014x-1}-1}=\frac{2014^2x+2014+2014x-1}{2014^2x+2014-2014x+1}\\
&= \frac{2014\cdot 2015x+2013}{2013\cdot 2014x+2015}.
\end{aligned}$$

1. Transformacije daju

$$\left[\left(\frac{22}{3}\cdot\frac{6}{11}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\left(\frac{44}{3}\cdot\frac{3}{11}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=1.$$

2. Kvadratni koreni su definisani ako je $2x+14\geq 0$, i $x-7\geq 0$ i $x+5\geq 0$, tj. $x\geq 7$. Kvadriranje daje

$$2x+14=x+5+2\sqrt{(x+5)(x-7)}+x-7.$$

odnosno $8=\sqrt{x^2-2x-35}$. Novo kvadriranje daje $x^2-2x-99=0$ jednačinu čija su rešenja $x=11$ i $x=-9$. Polazna jednačina ima jedno rešenje $x=11$.

3.

$$\log_2(5\log_3 3^2-\log_5 5^2)=\log_2(5\cdot 2\log_3 3-2\log_5 5)=\log_2(10-2)=\log_2 8=\log_2 2^3=3.$$